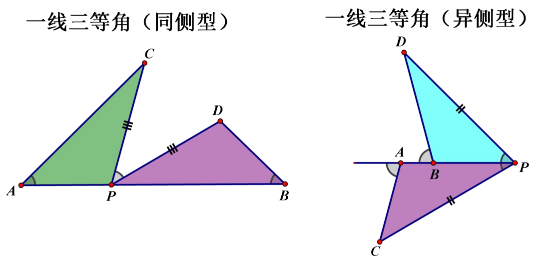
一线三等角模型及应用

【知识导航】

“一线三等角”在初中几何中出现得比较多，是一种常见的全等或相似模型，指的是有三个等角的顶点在同一条直线上构成全等或相似图形.这三个等角可以是直角也可以是锐角或钝角，可以是在直线的同侧，也可以是在直线的异侧.

一、“一线三等角”的基本构图：



基本结论：△APC≌△BDP

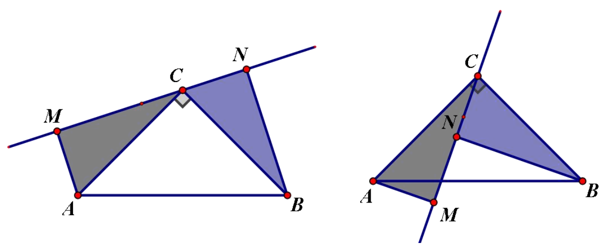
基本方法：

导角 1，“一线”，平角 180°

导角 2，“内角和”或推论

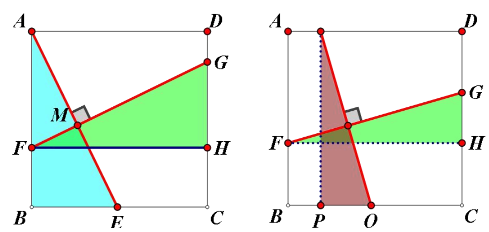
判定定理：AAS 或 ASA

二、“一线三等角”——“三垂直”+“十字架”



基本结论：△ACM≌△CBN

MN=AM+BN（左）; MN=BN-AM（右）



△ABE≌△FHG

基本方法：作“横平竖直”辅助线，构造全等

【典例讲练】

例题 1、如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC，E 为 BC 上一点，连接 AE，作 AF⊥AE 且 AF=AE，BF 交 AC 于点 D.

（1）如图 1，求证：点 D 为 BF 中点；

（2）如图 1，求证：BE=2CD；

（3）如图 2，若$\frac{BE}{CE}=\frac{2}{3}$，则$\frac{AD}{CD}=$__________.

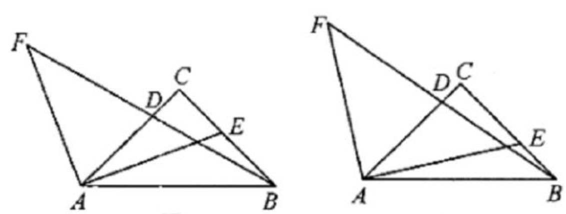
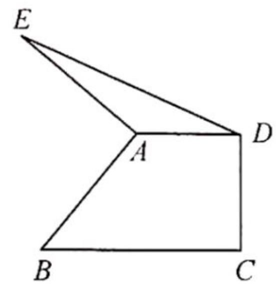
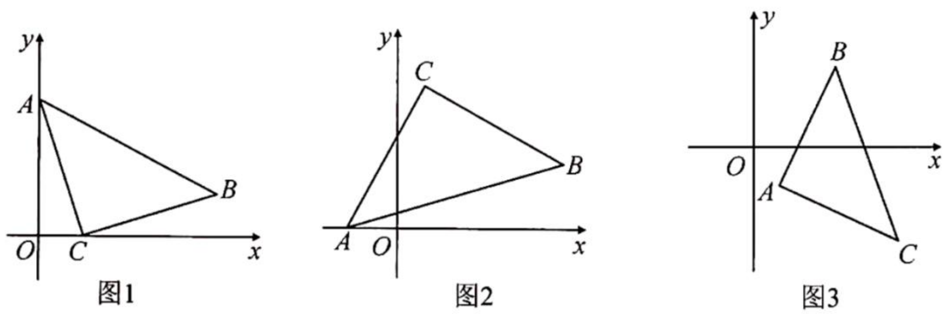


图1　　图2

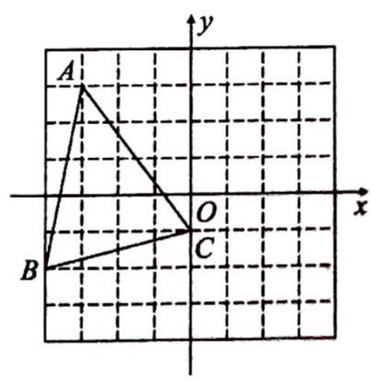
例题 2、如图，在四边形 ABCD 中，∠ADC=∠C=90°，BC=7，AD=4，过点 A 作 AE⊥AB，垂足为 A，且 AE=AB，连接 DE.求△ADE 的面积。



例题 3、（1）如图 1，△ABC 为等腰直角三角形，AC=BC，AC⊥BC，A（0，3），C（1，0），求点 B 的坐标。
（2）如图 2，△ABC 为等腰直角三角形，AC=BC，AC⊥BC，A（-1，0），C（1，3），求点 B 的坐标。
（3）如图 3，△ABC 为等腰直角三角形，AC=AB，AC⊥AB，B（2，2），C（4，-2），求点 A 的坐标.

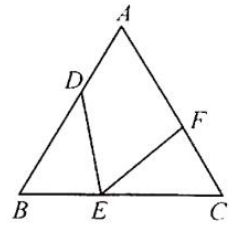


例题 4、如图，在带有平面直角坐标系的网格中，△ABC 的顶点都在边长为 1 的小正方形的顶点上.请用无刻度的直尺，运用全等的知识作出△ABC 的高线 BF（保留作图痕迹并说明理由）.

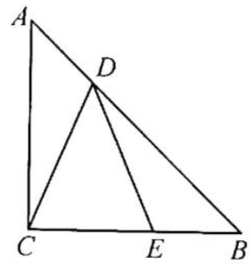


【随堂训练】

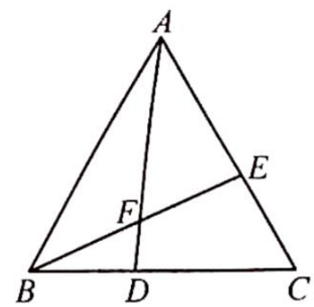
1、如图，△ABC 为等边三角形，D，E，F 分别 AB，BC，AC 上的点，∠DEF=60°，BD=CE. 求证：BE=CF.



2、如图，在等腰 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，点 D，E 分别为 AB，BC 上的点，且 CD=DE，∠CDE=45°，求证：BD=BC.

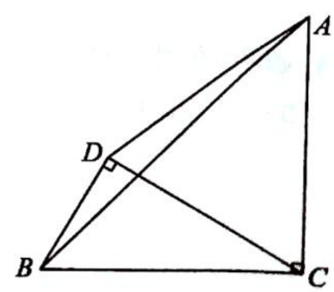


3、如图，△ABC 为等边三角形，D，E 分别是 BC，AC 上的点，BE，AD 交于点 F，∠AFE=60°，求证：AD=BE.



4、如图，△ABC 为等腰直角三角形，∠ACB=90°，CD=4，∠BDC=90°，求△ADC 的面积.

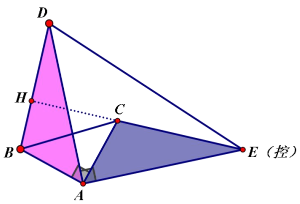
【解析】过 A 作 CD 的垂线段，构造三垂直，答案：8

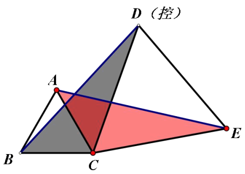


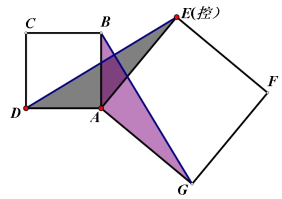
手拉手模型及应用

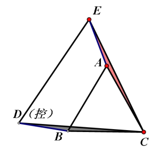
【知识导航】

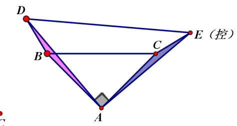
手拉手模型的特点：两个<u>**顶角度数相等**</u>的等腰三角形**共用**一个顶角顶点，并连结对应的底角顶点。









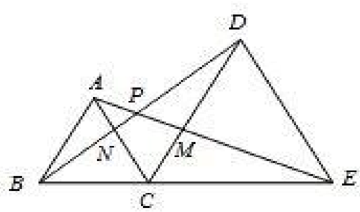
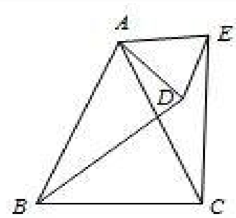
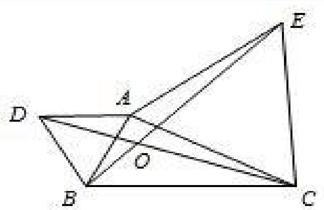
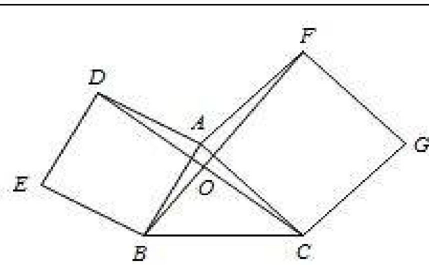


基本结论：**角生角**，60°→60°；90°→90°

角平分，第三边所在直线的夹角或其邻补角，被它们交点和公共顶点的连线平分。

基本方法：手拉手，导角找“8”字

手拉手起源于“A”字，本质：<u>**旋转全等**</u>

模型	已知	如图	结论
三角形手拉手	等边三角形 ABC 与等边三角形 CDE，点 B、C、E 三点共线，连接 AE，BD 相交于点 P，AE 与 CD 相交于点 M，BD 与 AC 相交于点 N		①$\triangle BCD\cong\triangle ACE$ ②$BD=AE$ ③$\angle APB=60°$ ④CP 平分$\angle BPE$ ⑤$\triangle CMN$ 为等边三角形 ⑥$PB=PA+PC$ ⑦$PE=PD+PC$
	等腰三角形 ABC 与等腰三角形 ADE，且 $\angle BAC=\angle DAE$，连接 BD，CE		①$\triangle ABD\cong\triangle ACE$ ②$BD=CE$ ③BD 与 CE 的夹角等于$\angle BAC$ 或和$\angle BAC$ 互补
	$\triangle ABC$ 中，以 AB 为边作等边三角形 ADB，以 AC 为边作等边三角形 ACE，连接 DC、BE，相交于点 O		①$\triangle ADC\cong\triangle ABE$ ②$DC=BE$ ③$\angle DOB=60°$
正方形手拉手	$\triangle ABC$ 中，以 AB 为边作正方形 $ABED$，以 AC 为边作正方形 $ACGF$，连接 DC、BF，相交于点 O		①$\triangle ADC\cong\triangle ABF$ ②$CD=BF$ ③$\angle DOB=90°$

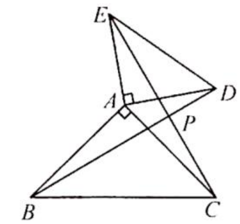
【典例讲练】

【例 1】 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$，连接 BD，CE 交于点 P.

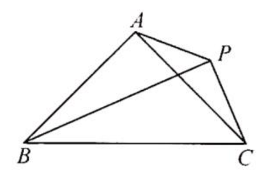
(1)求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$；

(2)判断 BD，CE 的关系并证明；

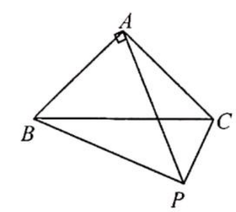
(3)连接 PA，求 $\angle APB$ 的度数.



【例 2】 如图，等腰 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，P 为 $\triangle ABC$ 外一点，$\angle APB=45^\circ$，连接 PC. 求 $\angle APC$ 的度数.



1. 在例 2 的条件下，将点 P 移至 BC 的下方，$\angle APB=45^\circ$ 不变，求 $\angle APC$ 的度数.



(2)如图 2，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle ADB=\angle BAC=60°$，求$\angle ADC$ 的度数；

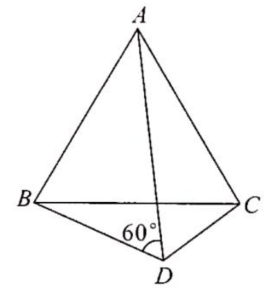


图 2

(3)如图 3，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$\angle ADB=30°$，求$\angle ADC$ 的度数；

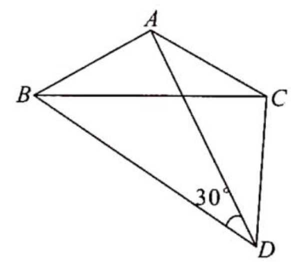


图 3

(4)如图 4，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle ADB=\angle ABC=\angle ACB$，求证：$AD$ 平分$\angle BDC$.

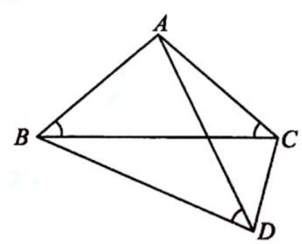


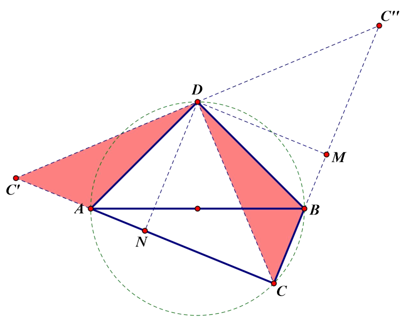
图 4

对角互补模型及应用

【知识导航】

一、对角互补（双直角）

1、双直角异侧型



基本结论：

CB+CA=2DN=2DM

CA-CB=2AN=2BM

边相等→角平分

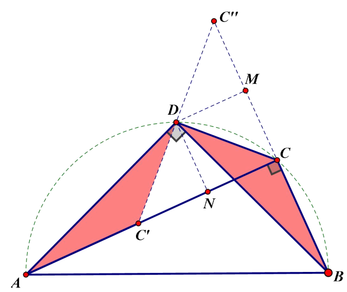
角平分→边相等

基本方法：

辅助线 1：作双垂线

辅助线 2：旋转

2、双直角同侧型



基本结论：

AC-BC=2CN=2CM

AC+BC=2AN=2BM

边相等→角平分

角平分→边相等

基本方法：

辅助线 1：作双垂线

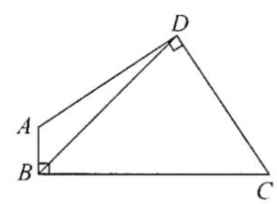
辅助线 2：旋转

【典例讲练】

例题 1、如图，在四边形 ABCD 中，∠ABC=∠ADC=90°，BD 平分∠ABC.

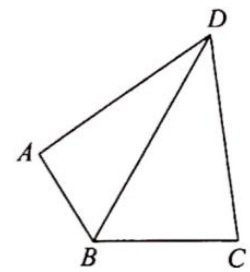
求证：（1）AD=CD；

（2）$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}BD^2$

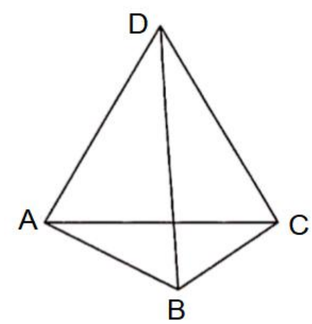


【同类变式】

1、如图，在四边形 ABCD 中，∠ABC=2∠ADC=120°，BD 平分∠ABC. 求证：（1）AD=CD；（2）AB+BC=BD.



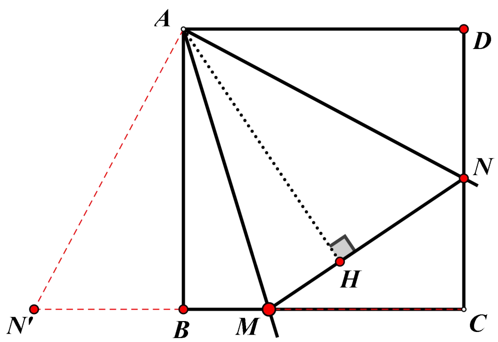
2、如图，在四边形 ABCD 中，∠ABC+∠ADC=180°，BD 平分∠ABC. 求证：AD=CD.



夹半角模型及应用

【知识导航】

1、90° 半角模型内半角



基本结论：

BM + DN = MN

△CMN 周长为正方形周长的一半

AH=正方形边长

∠ANM=∠AND，

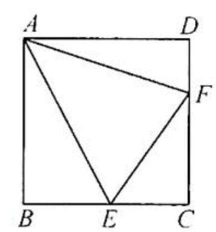
∠AMN=∠AMB

【典例讲练】

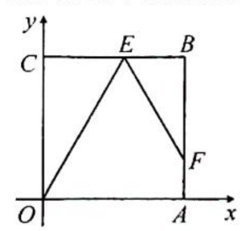
【例 1】正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，CD 上的点，$\angle EAF=45°$. 求证：

(1)$EF=BE+DF$；

(2)AE 平分$\angle BEF$，AF 平分$\angle DFE$.



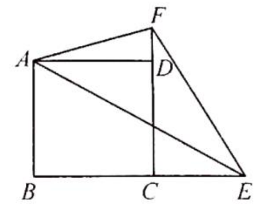
【例 2】如图，$B(4,4)$，$BC\perp y$ 轴于点 C，$BA\perp x$ 轴于点 A，E 为 BC 上一动点(不与 B，C 重合)，F 为 AB 上一动点，且满足$\angle OEF=\angle AOE$，在运动过程中，$\triangle BEF$ 的周长变吗？若不变求其值；若变化求其变化范围.



1. 在例 1 的条件下，若点 E 在 BC 的延长线上，点 F 在 CD 的延长线上，其余条件不变.

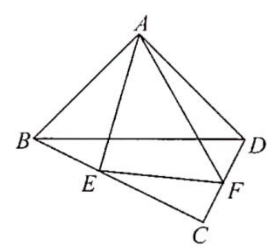
(1)问：EF 和 BE，DF 三条线段之间有何数量关系？写出关系式并证明；

(2)问：$\angle AFD$ 与 $\angle AFE$ 之间有何数量关系？写出关系式并证明.



2. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=\angle C=90^\circ$，$E$，$F$ 分别为 BC，CD 上的点，$\angle EAF=45^\circ$.

问：EF，BE，DF 之间有何数量关系？写出关系式并证明.



3. 如图，在平面直角坐标系中，点 $A(0,2)$，$B(2,0)$，点 C 在 $\angle ABO$ 的平分线上，$\angle ACO=67.5^\circ$，求 $\angle AOC$ 的度数.